|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | | |
| Федеральное государственное бюджетное  образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский государственный технический университет» | | |
|  | | |
| Кафедра прикладной математики | | |
| Курсовой проект | | |
| по дисциплине «Численные методы» | | |
| **Метод конечных элементов решения краевых задач  эллиптического уравнения** | | |
|  | | |
|  |  |  |
|  | Группа ПМ-01 | самсонов семён |
|  |  |  |
|  | Вариант 65 |  |
|  |  |  |
|  | Преподаватель | Персова Марина Геннадьевна |
|  |  |  |
|  |  |  |
| Новосибирск, 2022 | | |

# Задание

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в полярной системе координат. Базисные функции билинейные на прямоугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент разложить по билинейным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

# Постановка задачи

Решаемое уравнение в общем виде:

Область интегрирования:

Граница интегрирования:

Краевые условия:

- Первые:

- Вторые:

- Третьи:

- коэффициент диффузии,

- коэффициент теплообмена.

Согласно условиям варианта, в задаче используется полярная система координат . Для неё формулы операторов уравнения определяются следующим видом:

А само уравнение в таком случае будет выглядеть следующим образом:

Его невязка будет иметь следующий вид:

Потребуем, чтобы эта невязка была ортогональна (в смысле скалярного произведения пространства ) некоторому пространству функций , которое мы будем называть **пространством пробных функций**, т.е.:

Воспользуемся формулой Грина:

Для данного варианта:

Выражая из неё



и подставляя в исходное, получаем:

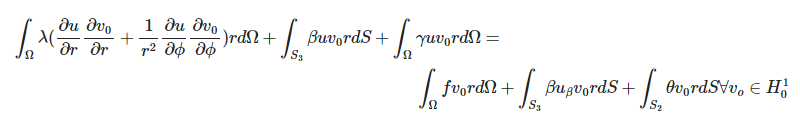
Интеграл по границе разложим по границам , и с учётом краевых условий:

Поскольку на границе краевыми условиями не определяется значение , слагаемое следует исключить из уравнения, потребовав, чтобы пространство пробных функций содержало только функции, которые принимают нулевые значения на границе . Поэтому в качестве выберем - пространство пробных функций , которые на границе удовлетворяют нулевым первым краевым условиям. С учётом этого, уравнение принимает вид:

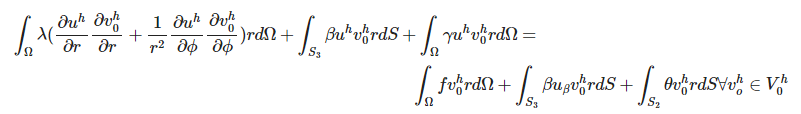
# Конечномерная аппроксимация

При построении конечноэлеменных аппроксимаций по методу Галёркина пространства и заменяются конечномерными пространстами и . При этом чаще всего в МКЭ функции из этих пространств являются элементами одного и того же конечномерного пространства , которое мы всегда будем определять как линейное пространство, натянутое на базисные функции . При этом функции являются набором финитных кусочно-полиномиальных функций, а приближённое решение , полученное как линейная комбинация .

Получим аппроксимацию уравнения Галеркина на конечномерных пространствах и . Исходное уравнение:

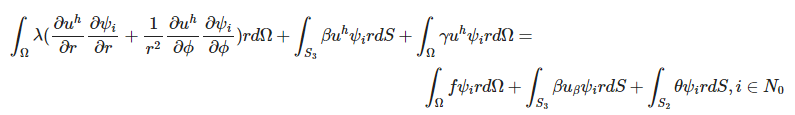


Для аппроксимации заменим функцию аппроксимирующей её функцией , а функцию - функцией :



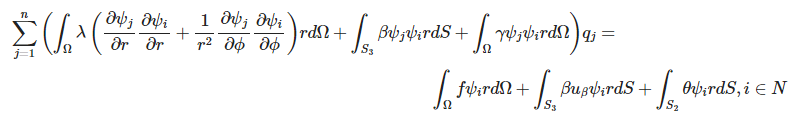
Поскольку любая функция может быть представлена в виде линейной комбинации:

вариационное уравнение эквивалентно следующей системе:



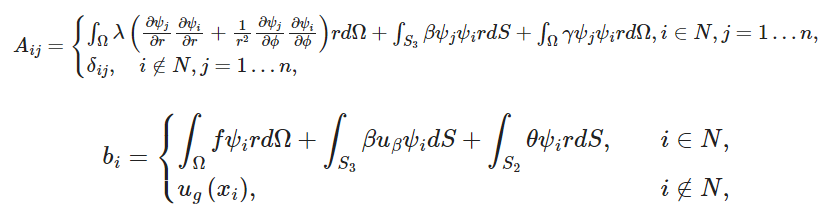
Таким образом, МКЭ-решение удовлетворяет полученной системе уравнений. Поскольку , оно может быть представлено в виде линейной комбинации базисных функций пространства :

Подставляя это выражение в предыдущее уравнение, получаем СЛАУ для компонент вектора весов с индексами :



При решении краевой задачи с использованием базисных функций, принимающих нулевые значения во всех узлах сетки, кроме одного, конечноэлементная СЛАУ для вектора весов может быть записана в матричном виде:

Где компоненты матрицы и вектора определяются соотношениями:



в которых - символ Кронекера ().

Без учёта краевых условий (их мы будем накладывать после того, как матрица была посчитана), матрица является суммой матриц жёсткости и массы :

# Базисные функции

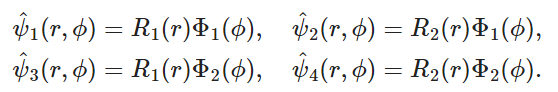
В данной задаче мы будем работать с билинейными базисными функциями на прямоугольниках. Для начала разобъём области интегрирования на прямоугольники :

Ячейки этой сетки строятся в виде прямого (декартова) произведения независимых друг от друга одномерных сеток .

Билинейные базисные функции определяются следующим образом. На отрезке задаются две одномерные линейные функции:

Аналогично, на отрезке задаются две одномерные линейные функции:

Локальные базисные функции на конечном элементе представляются в виде произведения линейный функций:



Очевидно, что функция равна единице в узле и нулю во всех остальных узлах ; остальные функции аналогично равны 1 только в соответствующем им узле и нулю во всех остальных.

# Вычисление локальных матриц

Локальные матрицы - матрицы, являющиеся частью глобальных матриц, и вычисляющиеся на одном конечном элементе.

Компоненты локальных матриц и будут вычисляться следующим образом:

Учитывая разбиение области интегрирования на прямоугольники , компоненты локальных матриц принимают следующий вид:

При чём, - усреднённое на прямоугольнике значение , а .

Перед тем, как записать аналитические выражения для вычисления элементов локальной матрицы , вычислим вспомогательные интегралы:

Теперь вычислим компоненты матрицы жёсткости:

Перед тем, как записать аналитические выражения для вычисления элементов локальной матрицы , вычислим вспомогательные интегралы:

(взять с варика)

Вычислим компоненты локальной матрицы массы:

(взять с варика)

Локальные компоненты $\hat b\_i$ вектора $b$ будут вычисляться следующим образом:

$$\hat b\_i = \int\_{\Omega\_k}{f \hat\psi\_i r drd\phi}$$

Вместо того, чтобы считать интегралы, будем вычислять $\hat b\_i$ с учётом того, что функция $f$ на конечном элементе $\Omega\_k$ представлена в виде разложения по базисным функциям $ \displaystyle\sum\_{v=1}^n{\hat f\_v \hat\psi\_v}$, где $n$ - число локальных базисных функций конечного элемента $\Omega\_k$. Тогда локальный вектор $\hat b$ может быть выичслен через матрицу $\hat C$, являющейся матрицей массы $\hat M$ с параметром $\gamma = 1$:

$$\hat b = \hat C \cdot \hat f$$